ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol.2 No.1 Januari 2006 : 134-138

Karakterisasi Matrik Leslie Ordo Tiga

Mudin Simanihuruk, Hartanto

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 1 Desember 2005; disetujui 15 Desember 2005

Abstrak - Misalkan L = [l_{ij}] adalah matrix bujursangkar berorder n sedemikian hingga $l_{1j} \geq 0$ untuk j = 1,2,...,n ; $0 < l_{i(i-1)} \leq 1$ untuk i = 2,3,...,n dan $l_{ij} = 0$ untuk i = 2,3,...,n ; dan j = 1,2,...,n tetapi $j \neq i - 1$. Matrix L disebut matrix Leslie. Perhatikanlah bahwa setiap pemangkatan dari matrix Leslie $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$ adalah I, L atau L^2. Pada makalah ini, akan diberikan karakterisasi matrix Leslie L berorder tiga sedemikian hingga setiap pemangkatan dari L adalah I, L atau L^2 .

Kata Kunci : **matrix Leslie ; demografi.**

1. Pendahuluan

Salah satu model pertumbuhan populasi yang sering digunakan para ahli demografi adalah Model Leslie. Para perempuan didistribusikan kedalam kelompok berdasarkan usia. Apabila banyaknya kelompok sama dengan n dan $X_i^{(k)}$ adalah banyaknya perempuan pada Kelompok i pada pengamatan t_k maka dapat ditunjukkan bahwa $X_1^{(k)} = a_1 X_1^{(k-1)} + a_2 X_2^{(k-1)} + \ldots + a_n X_n^{(k-1)}$, $a_i \geq 0$, i = 1,2,...,n dan $X_{i+1}^{(k)} = b_i X_i^{(k-1)}$, $0 < b_i \leq 1$, i = 1,2,..,n-1. Dua persamaan yang terakhir dapat ditulis dalam bentuk matrik $X^{(k)} = L\, X^{(k-1)}$, k = 1,2,... di mana

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ X_3^{(k)} \\ . \\ . \\ . \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix} \text{ dan } L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrik L disebut matrik Leslie. Dari persamaan yang terakhir dapat ditunjukkan bahwa $X^{(k)} = L^k X^{(0)}$. Apabila $L^k = I$, maka $X^{(k)} = X^{(0)}$. Jadi pada saat t_k jumlah populasi kembali sama dengan jumlah populasi awal. Pada makalah ini akan diberikan syarat perlu dan cukup bagi matrik Leslie L ordo tiga agar $L^k = I$. Apabila $L^k = I$, maka setiap pemangkatan L^r akan menghasilkan L atau L^2,..., atau L^{k-1}.

2. Pertumbuhan populasi model Leslie

Misalkan L adalah usia maksimum yang dapat dicapai oleh perempuan pada suatu populasi. Apabila para perempuan itu dibagi bagi kedalam n kelompok berdasarkan usia, maka jarak interval masing-masing kelompok adalah L/n. Dengan demikian Kelompok 1, adalah mereka yang berusia [0,L/2), Kelompok 2 adalah mereka yang berusia [L/n,2L/n),..., Kelompok n adalah mereka yang berusia [(n-1)/L,L]. Setiap saat, komposisi jumlah perempuan dalam kelompok dipengaruhi oleh tiga faktor yaitu faktor kelahiran, kematian dan pertambahan usia.

Misalkan t_i adalah waktu pengamatan, i = 0,1,..., k,.. . Pada Model Leslie jarak pengamatan t_{i-1} ke t_i sama dengan jarak interval kelompok. Jadi $t_i = iL/n$, untuk i = 0,1,2,....

Misalkan a_i adalah rata-rata banyaknya anak perempuan yang lahir dari setiap Kelompok i dan b_i adalah perbandingan antara banyaknya perempuan yang bertahan hidup sehingga mampu masuk kedalam Kelompok i+1, dengan banyaknya perempuan dalam Kelompok i. Perhatikanlah bahwa $a_i \geq 0$, i=1,2,3,...,n dan $0 < b_i \leq 1$. Perhatikan juga paling sedikit satu $a_i > 0$, karena kalau tidak berarti proses kelahiran tidak terjadi dan $b_i > 0$, karena kalau tidak, maka tidak ada perempuan yang bertahan masuk kedalam Kelompok i+1.

Misalkan $X_i^{(k)}$ adalah banyaknya perempuan pada Kelompok i pada pengamatan t_k untuk i = 1,2,...,n. Pada saat pengamatan t_k banyaknya perempuan pada Kelompok 1 sama dengan banyaknya anak perempuan yang lahir di Kelompok 1 dari waktu t_{k-1} ke t_k + banyaknya anak perempuan yang lahir di Kelompok 2 dari waktu t_{k-1} ke t_k + ... + banyaknya anak perempuan yang lahir di Kelompok n dari waktu t_{k-1} ke t_k . Jadi

$$X_1^{(k)} = a_1 X_1^{(k-1)} + a_2 X_2^{(k-1)} + ... + a_n X_n^{(k-1)} \quad (1)$$

Karena jarak interval setiap kelompok sama dengan jarak dua pengamatan yang berurutan, maka semua perempuan yang berada pada Kelompok i+1 pada saat pengamatan t_{k+1} berada pada Kelompok i pada saat pengamatan t_k. Oleh karena itu banyaknya perempuan pada Kelompok i+1, i = 1,2,...,n-1, pada saat pengamatan t_k sama dengan banyaknya perempuan yang masih hidup pada Kelompok i pada waktu t_{k-1} ke t_k . Jadi

$$X_{i+1}^{(k)} = b_i X_i^{(k-1)}, \ i = 1,2,..,n-1 \quad (2)$$

Persamaan (1) dan (2) dapat ditulis dalam bentuk matrik

$$X^{(k)} = L X^{(k-1)}, k = 1,2,... \quad (3)$$

di mana $X^{(k)} = \begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ X_3^{(k)} \\ . \\ . \\ . \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix}$ dan

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrik L disebut matrik Leslie.

Dari persamaan rekursif (3) dapat ditunjukkan bahwa $X^{(k)} = L^k X^{(0)}$. Apabila $L^k = I$, maka $X^{(k)} = X^{(0)}$. Berarti pada saat t_k jumlah populasi kembali sama denga jumlah populasi awal.

Matriks $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matrik Leslie yang mempunyai sifat-sifat yang menarik. Bernadelli (1941) dalam [**2**] menunjukkan bahwa setiap pemangkatan dari L akan menghasilkan matrik identitas I, L atau L^2.

Dapat ditunjukkan bahwa nilai eigen dari matrik Leslie L di atas adalah 1, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, dan $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ dan L tidak mempunyai nilai eigen yang dominan di mana nilai eigen dominan adalah nilai eigen positip λ_1 sedemikian hingga $\lambda_1 \geq |\lambda_k|$. Apakah setiap matrik Leslie L ordo tiga yang nilai eigennya tidak dominan merupakan syarat cukup agar $L^t = I$ untuk suatu bilangan bulat t ? Ternyata hal ini tidak benar karena matrik Leslie $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 48 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ mempunyai nilai eigen 2, $-1+ i\sqrt{3}$, $-1 - i\sqrt{3}$ dan di antaranya tidak ada nilai eigen yang dominan, akan tetapi dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $L^3 \neq I$. Jadi nilai eigen yang dominan dari matrik Leslie L tidak dapat kita harapkan memberikan karakteristik bagi matrik $L^t = I$ untuk suatu bilangan bulat t. Pada makalah ini kita tunjukkan syarat perlu dan cukup agar matrik Leslie L memiliki sifat $L^t = I$ untuk suatu bilangan bulat positip $t \geq 2$. Karakteritik lain dari matrik Leslie dapat dibaca pada Linear Algebra [**1**].

Notasi dan definisi lain yang digunakan dalam makalah ini mengikuti [**1**]. Yang dimaksud dengan matrik diagonal adalah matrik bujursangkar yang entrinya diluar diagonal utama sama dengan nol. Matrik diagonal D ordo n dinyatakan dengan D = diag(d_1, d_2,...,d_n). Apabila setiap $d_i > 0$ maka matrik diagonal D disebut matrik diagonal positip. Selanjutnya notasi $(A)_{ij}$ menunjukkan entri dari matrik A pada baris ke i dan kolom ke j.

3. Syarat perlu dan cukup

Dua Lemma berikut akan menunjukkan bahwa entri dari matrik Leslie L ordo tiga adalah bilangan positip.

Lemma 1: Misalkan A adalah matrik ordo tiga. Jika semua entri dari A pada kolom ketiga sama dengan nol, maka semua entri dari A^t pada kolom ketiga sama dengan nol.

Bukti: Misalkan $A^{t-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, $t \geq 2$. Akan ditunjukkan bahwa semua entri dari A^t pada kolom ketiga semuanya sama dengan nol. Perhatikanlah bahwa $A^t = A^{t-1}A$ dan $(A^t)_{13} = b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33}$, $(A^t)_{23} = b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33}$, $(A^t)_{33} = b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33}$. Karena $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ maka $(A^t)_{13} = (A^t)_{23} = (A^t)_{33} = 0$. Dengan demikian Lemma terbukti.

Lemma 2: Misalkan $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $0 < x \leq 1$ dan $0 < y \leq 1$. Jika L^t, $t \geq 2$, adalah matrik diagonal positip maka $c>0$.

Bukti: Misalkan c = 0. Aplikasikan Lemma 1 terhadap L^t diperoleh $(L^t)_{13} = (L^t)_{23} = (L^t)_{33} = 0$. Karena $(L^t)_{33} = 0$, maka L^t bukan matrik diagonal positip, kontradiksi dengan hipothesis dari Lemma. Oleh karena itu $c > 0$. □

Lemma 3: Misalkan $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, $0 < x \leq 1$ dan $0 < y \leq 1$. Jika $a > 0$ atau $b > 0$ maka ada dua entri positip pada baris pertama dari L^t, $t \geq 2$.

Bukti: Lemma akan dibuktikan dengan induksi pada t.

Basis Induksi: Perhatikanlah bahwa baris pertama dari L^2 yang dinyatakan dengan B_1^2 sama dengan

$$B_1^2 = [a \;\; b \;\; c] \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} = [a^2 + bx \quad ab + cy \quad ac].$$

Perhatikanlah bahwa $cy > 0$. Jika $a > 0$ maka $ac > 0$. Jadi ada dua entri positip dari L^2 pada baris pertama yaitu $cy + ab$ dan ac. Demikian pula apabila $b > 0$, maka ada dua entri positip dari L^2 pada baris pertama yaitu $cy + ab > 0$ dan $a^2 + bx > 0$.

Hipothesa Induksi: Misalkan ada dua entri positip pada baris pertama dari L^{t-1}.

Langkah Induksi: Akan ditunjukkan ada dua entri positip pada baris pertama dari L^t.

Misalkan $B_1^{t-1} = [p \;\; q \;\; r]$, adalah baris pertama L^{t-1}. Berdasarkan induksi hipothesa diperoleh: (i). $p > 0$ dan $q> 0$, (ii) $p > 0$ dan $r > 0$, atasu (iii) $q > 0$ dan $r > 0$. Perhatikanlah bahwa B_1^t dari L^t adalah

$$B_1^t = [p \;\; q \;\; r] \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} = [ap + qx \quad pb + yr \quad pc].$$

Jika $p > 0$ dan $q > 0$ maka $ap + qx > 0$ dan $pc > 0$, jadi ada dua entri positip pada baris pertama dari L^t.

Jika $p > 0$ dan $r > 0$, maka $pb + yr > 0$ dan $pc > 0$, jadi ada dua entri positip pada baris pertama L^t.

Jika $q > 0$ dan $r > 0$, maka $ap + qx > 0$ dan $pb + yr > 0$, jadi ada dua entri positip pada baris pertama L^t. Dengan demikian Lemma terbukti.

Lemma 4: Misalkan $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$ adalah matrik Leslie di mana $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $0 < x \leq 1$ dan $0 < y \leq 1$. Jika L^t adalah matrik diagonal positip maka $a = 0$ dan $b = 0$.

Bukti: Karena L^t adalah matrik diagonal positip maka L^t memenuhi kondisi Lemma 2. Oleh karena itu kita simpulkan $c > 0$. Selanjutnya misalkan $a > 0$ atau $b >0$. Kita akan menunjukkan bahwa pemisalan ini akan menimbulkan kontradiksi seperti berikut. Karena a > 0 atau b > 0, maka dengan menggunakan Lemma 3 kita peroleh bahwa L^t mempunyai dua entri positip pada baris pertama. Berarti L^t bukan matrik diagonal yang dengan sendirinya bukan matrik diagonal positip, kontradiksi dengan hipothesis dari Lemma. Oleh karena itu pemisalan a > 0 atau b > 0 adalah salah. Jadi a = 0 dan b = 0. Dengan demikian Lemma terbukti.

Selanjutnya akan kita buktikan bahwa syarat perlu dan cukup agar matrik Leslie L ordo tiga memiliki sifat $L^{3k} = I$, untuk bilangan bulat $k \geq 1$. Teorema berikut menunjukkan bahwa $L^{3k} = \mathrm{diag}((cxy)^k, (cxy)^k, (cxy)^k)$ bila L adalah matrik ordo tiga di mana entri bada baris pertama kolom pertama dan kolom kedua sama dengan nol.

Teorema 1: Misalkan $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$, $c > 0$, $0 < x \leq 1$ dan $0 < y \leq 1$. Jika a = 0 dan b = 0 maka $L^{3k} = \mathrm{diag}((cxy)^k, (cxy)^k, (cxy)^k)$ untuk $k \geq 1$.

Bukti: Lemma akan dibuktikan dengan induksi pada k. Basis Induksi: Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa

$L^2 = \begin{bmatrix} 0 & cy & 0 \\ 0 & 0 & cx \\ xy & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $L^3 = L^2.L = \mathrm{diag}(cxy,cxy,cxy)$. Jadi Teorma di atas benar untuk k= 1.

Hipothesa Induksi: Misalkan teorema di atas benar untuk k-1 yaitu $L^{3(k-1)} = \mathrm{diag}((cxy)^{k-1}, (cxy)^{k-1}, (cxy)^{k-1})$.

Langkah induksi : Akan ditunjukkan bahwa $L^{3k} = \mathrm{diag}((cxy)^k, (cxy)^k, (cxy)^k)$.

Perhatikanlah bahwa $L^{3(k-1)+1} = L^{3(k-1)}$.

$$L= \begin{bmatrix} (cxy)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & (cxy)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & (cxy)^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & (cxy)^{k-1}c \\ (cxy)^{k-1}x & 0 & 0 \\ 0 & (cxy)^{k-1}y & 0 \end{bmatrix},$$

$L^{3(k-1)+2} = L^{3(k-1)+1}$.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (cxy)^{k-1}c \\ (cxy)^{k-1}x & 0 & 0 \\ 0 & (cxy)^{k-1}y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (cxy)^{k-1}cy & 0 \\ 0 & 0 & (cxy)^{k-1}cx \\ (cxy)^{k-1}xy & (cxy)^{k-1}y & 0 \end{bmatrix}$$

dan $L^{3(k-1)+3} = L^{3(k-1)+2}$.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & (cxy)^{k-1}cy & 0 \\ 0 & 0 & (cxy)^{k-1}cx \\ (cxy)^{k-1}xy & (cxy)^{k-1}y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

$= \mathrm{diag}((cxy)^{k-1}, (cxy)^{k-1}, (cxy)^{k-1})$.

Dengan demikian teorema di atas terbukti.

Selanjutnya teorema berikut menjelaskan syarat perlu dan cukup bagi matrik Lesli L agar L^{3k} adalah matrik diagonal positip.

Teorema 2: Misalkan $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$ adalah matrik Leslie di mana $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $0 < x \leq 1$ dan $0 < y \leq 1$. Matrik L^{3k} adalah matrik diagonal positip jika dan hanya jika a = b = 0 dan c > 0.

Bukti: Misalkan L^{3k} adalah matrik diagonal positip. Dengan menggunakan Lemma 2 terhadap L^{3k} diperoleh c > 0. Selanjutnya aplikasikan Lemma 4 terhadap L^{3k} diperoleh a = b = 0.

Sebaliknya misalkan a = b = 0 dan c > 0. Dengan menggunakan Teorema 1 kita peroleh $L^{3k} = \mathrm{diag}((cxy)^k, (cxy)^k, (cxy)^k)$. Karena c > 0 maka cxy > 0. Oleh karena itu L^{3k} adalah matrik diagonal positip. dengan demikian teorema terbukti.

Akhirnya kita sampai pada karakterisasi dari matrik L sehingga $L^{3k} = I$ sebagaimana dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema 3: Misalkan $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$ adalah matrik Leslie di mana $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $0 < x \leq 1$ dan $0 < y$

≤ 1. Matrik $L^{3k} = I$ jika dan hanya $a = b = 0$ dan $cxy = 1$.

Bukti: Misalkan $L^{3k} = I$. Karena semua entri pada diagonal utama sama dengan 1, maka jelas L^{3k} adalah matrik diagonal positip. Berdasarkan Lemma 4, kita peroleh $a = b = 0$. Selanjutnya berdasrkan Teorema 1 kita peroleh $L^{3k} = \mathrm{diag}((cxy)^k, (cxy)^k, (cxy)^k)$. Karena $L^{3k} = I$, maka $(cxy)^k = 1$. Akibatnya $cxy = 1$.

Sebaliknya misalkan $a = b = 0$ dan $cxy = 1$. Karena $cxy = 1$ maka jelas $c > 0$. Perhatikanlah kondisi Teorema 2 yaitu $a = b = 0$ dan $c > 0$ terpenuhi. Oleh karena itu berdasarkan Teorema 2 kita peroleh bahwa L^{3k} adalah matrik diagonal positip. Dengan menggunakan Teorema 1 kita peroleh $L^{3k} = \mathrm{diag}((cxy)^k, (cxy)^k, (cxy)^k)$. Karena $cxy = 1$ maka $L^{3k} = I$. Dengan demikian teorema terbukti.

Dari Teorema 3 kita lihat apabila $a = b = 0$ dan $cxy = 1$ maka $L^{3k} = I$, $L^{3k+1} = L$ dan $L^{3k+2} = L^2$ dan $L^{3k+3} = I$ untuk $k \geq 1$.

4. Simpulan dan saran

Penelitian ini telah berhasil mengkarakterisasi matriksLeslie L berordo tiga sebagaimana dinyatakan dalam Teorema 3. Karakterisasi tersebut adalah sebagai berikut: Misalkan $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$ adalah matrik Leslie di mana $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $0 < x \leq 1$ dan $0 < y \leq 1$. Matrik $L^{3k} = I$ jika dan hanya jika $a = b = 0$ dan $cxy = 1$. Tekhnik-tekhnik pembuktian yang digunakan pada penelitian ini belum dapat digeneralisasi untuk mengkarakterisasi matrik Leslie berordo n, untuk nilai n yang cukup besar. Karakterisasi matrik Leslie L berordo tiga di atas menunjukkan suatu dugaan (conjecture) berikut: Apabila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah entri pada baris pertama dari matrik Leslie L berordo n dan $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ di mana b_i adalah entri pada baris ke i+1 dan pada kolom ke i, maka $L^{3k} = I$ jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$, $b_1 b_2 \ldots b_{n-1} a_n = 1$. Salah satu kesukaran yang ditemui untuk membuktikan Conjecture ini terletak pada kesulitan untuk mengeneralisasi Teorema 1 untuk sebarang matrik Leslie L berordo n. Kami sarankan agar peneliti lain meneliti lebih lanjut tentang kebenaran conjecture di atas.

Daftar Pustaka

[1] Anton,H. and Rorres,C., *Elementary Linear Algebra* (7th ed.), **1994**, John Wiley & Sons,Inc. New York.

[2] Tarumingkeng,R., *Dinamika Populasi*, **1994**, Pustaka Sinar Harapan, Jakarta.